Β' ΔΥΣΚΟΛΙΑΣ

1) Με τα ψηφία 1, 2, 3, 4, 5 φτιάχνουμε τετραψήφιους αριθμούς στους οποίους το κάθε ψηφίο μπορεί να χρησιμοποιηθεί περ/ρο από 1 φορά. Γίνεται, τυχαία επιλογή αριθμού, να βρείτε την πιθανότητα να έχει όλα τα ψηφία του διαφορετικά μεταξύ τους

ΛΥΣΗ

Δηλ. ψάχνω την πιθανότητα ο αριθμός που θα προκύψει να είναι της μορφής πχ 1,2,3,4 ή 2,1,3,5 κλπ.
Έστω A το ενδεχόμενο ο τετραψήφιος να έχει όλα τα ψηφία του διαφορετικά.

ψ_1 ψ_2 ψ_3 ψ_4 (Δυνατές περιπτώσεις)

5τρ × 5τρ. × 5τρ. × 5τρ. $= 5^4$ τρόπους $= \|S\|$

(Ευνοϊκές περιπτώσεις)

5τροπ × 4τροπ. × 3τροπ × 2τροπ $= 5\times4\times3\times2 = 5! = \|A\|$

Άρα, $P(A) = \dfrac{\|A\|}{\|S\|} = \dfrac{5!}{5^4} = \dfrac{24}{125} = 0.192$

2) Από το σύνολο μεταθέσεων των στοιχείων $1, 2, 3, \dots, \nu$ επιλέγουμε τυχαία μια. Να βρείτε, ποια η πιθανότητα να μην αρχίζει από 1.

ΛΥΣΗ

Έστω $A = \{$να μην αρχίζει από 1$\}$

Προφανώς $\|S\| = \nu!$ (διότι από σχήμα)

$\underline{1}$ $\underline{2}$ $\underline{3}$ $\underline{4}$ ... $\underline{\nu-1}$ $\underline{\nu}$ → $\nu!$ (πολλαπλασιαστική Αρχή)

$\nu \times (\nu-1) \times (\nu-2) \times (\nu-3) \times \dots \times 2 \times 1$

Τώρα θέλουμε τις μεταθέσεις που να μην αρχίζουν από 1
ΔΗΛΑΔΗ σχηματικά

$$\underset{\underset{(\nu-1)}{\uparrow}}{\underline{1}} \times \underset{\underset{(\nu-1)}{\uparrow}}{\underline{2}} \times \underset{\underset{(\nu-2)}{\uparrow}}{\underline{3}} \times \dots \times \underset{\underset{1}{\uparrow}}{\underline{\nu}} \longrightarrow (\nu-1)! \cdot (\nu-1)$$

(πολλαπλασιαστική Αρχή).

- Αφού δεν θέλουμε έναν από αυτούς στο παιχνίδι (και συγκεκριμένα το 1)
- Αλλά στη $2^{η}$ θέση πάλι $(\nu-1)$ διότι η άσκηση δεν το θέλει στην $1^{η}$ θέση, στην $2^{η}$ θέση δεν μας νοιάζει

Επομένως, $P(A) = \dfrac{(\nu-1)!\,(\nu-1)}{\nu!} = \dfrac{\cancel{(\nu-1)!}\,(\nu-1)}{\cancel{(\nu-1)!}\,\nu} = \dfrac{\nu-1}{\nu} =$

$$= 1 - \frac{1}{\nu} < 1.$$

3) Δέκα φίλοι, μεταξύ των οποίων ο Κώστας και ο Νίκος, θα καθίσουν τυχαία ο ένας δίπλα στον άλλον. Ποια η πιθανότητα ο Κώστας και ο Νίκος να κάτσουν σε διπλανές θέσεις; Ποια η πιθανότητα να παρεμβάλλονται άλλα ανάμεσά τους;

ΛΥΣΗ

Έστω $A = \{$ο Κώστας και ο Νίκος δίπλα$\}$.

άρα, $P(A) = \dfrac{\|A\|}{\|S\|} = \dfrac{2 \cdot 9!}{10!} = \dfrac{1}{5}$.

Αιτιολόγηση:

- $\|S\| = 10!$ (αφού 10 φίλοι θα κάτσουν τυχαία ο ένας δίπλα στον άλλον)

$$\underset{\underset{10\tau\rho.}{\uparrow}}{\overset{\theta_1}{\Box}} \times \underset{\underset{9\tau\rho.}{\uparrow}}{\overset{\theta_2}{\Box}} \times \dots \times \underset{\underset{1\tau\rho.}{\uparrow}}{\overset{\theta_{10}}{\Box}} = 10!$$

(πολλαπλασιαστική αρχή)

- $\|A\| = 2 \cdot 9!$

Θ_1 Θ_2 Θ_3 ... Θ_{10}

Κωσταs Νικοs, 8 τροπ ... 1 τροπ. $\Big\}\ 9 \cdot 8! = 9!$

Θ_1 Θ_2 Θ_3 ... Θ_{10}

8 τροπ . Κωσταs Νικοs . 7 τροπ . 1 τροπ.

ΔΗΛΑΔΗ ο Κωσταs και ο Νικοs μπορουν να μετακινουνται οταν ζευγοs μεχρι και τιs θεσειs 9 και 10.
αρα με 9 τροπουs μπορει αυτοι οι δυο να κινουνται
Αλλά μπορεί να καθίσει πρωτα ο Νικοs και μετά ο Κωσταs αρα το 9! ΔΕΝ αρκεί θελει να γινει $2 \times 9!$

> Το αλλο ερώτημα: Εστω $B = \{$παρεμβάλλονται αλλοι ανάμεσα τουs$\}$.
> Δηλαδή το $B = A^c$
> $A \cup A^c = S \Leftrightarrow$
> $\Leftrightarrow P(A') = 1 - P(A) \Leftrightarrow$
> $\Leftrightarrow P(A') = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5} \Leftrightarrow$
> $\Leftrightarrow P(B) = \frac{4}{5}$
> Δηλαδή το ερώτημα είναι η αρνηση του προηγούμενου

4) Να βρείτε την πιθανότητα του ενδεχομένου τέσσερα ατομα να έχουν γεννηθεί σε τέσσερις διαφορετικές εποχές του ετους

ΛΥΣΗ

4 ατομα $\longrightarrow$ A_1, A_2, A_3, A_4

$4 \times 4 \times 4 \times 4 = 4^4$

ΕΠΟΧΕΣ $\longrightarrow$ Χειμ. Αν. Καλ Φθιν

Εστω $A = \{$τα 4 άτομα γεννηθηκαν 4 διαφορετικές εποχες$\}$

$$P(A) = \frac{\|A\|}{\|S\|} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{4^4} = \frac{3}{32}$$

Για τις ευνοϊκες περιπτωσεις του A προφανωs

$4 \times 3 \times 2 \times 1$

Χειμ Αν Καλ Φθιν $= 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$

5) Από ένα σύλλογο καθηγητών με 7 άνδρες και 6 γυναίκες επιλέγουμε τυχαία 4 άτομα. Να βρεθεί τις πιθανότητες των ενδεχομένων:

i) τα άτομα να είναι γυναίκες

ii) ένα τουλάχιστον άτομο να είναι άνδρας

iii) να υπάρχει μόνο μια γυναίκα

ΛΥΣΗ

i) $A = \{$τα 4 άτομα γυναίκες$\}$

το πλήθος των δυνατών περιπτώσεων είναι $7+6=13$.

και επιλέγουμε 4 άτομα. Άρα $||S|| = \binom{13}{4}$

το πλήθος των ευνοϊκών περιπτώσεων (δεν μας ενδιαφέρει η σειρά) θα είναι 6 ανά 4. Άρα $\binom{6}{4} = ||A||$

Επομένως, $P(A) = \frac{||A||}{||S||} = \frac{\binom{6}{4}}{\binom{13}{4}} = \frac{3}{143}$

ii) $B = \{$ένα τουλάχιστον να είναι άνδρας$\}$

παίρνω το $B^c = \{$όλα να είναι γυναίκες$\}$

Αφού, $P(B) + P(B^c) = 1 \Rightarrow P(B) = 1 - P(B^c) = 1 - \underline{P(A)} = \frac{140}{143}$

iii) $\Gamma = \{$να υπάρχει μόνο μια γυναίκα$\} =$

$= \{$τρεις άνδρες και 1 γυναίκα$\}$

άρα, προφανώς

$$||\Gamma|| = \binom{7}{3} \times \binom{6}{1}$$

Άρα,

$$P(\Gamma) = \frac{||\Gamma||}{||S||} = \frac{\binom{7}{3} \times \binom{6}{1}}{\binom{13}{4}} = \frac{42}{143}.$$

6) Ένα κουτί περιέχει 20 ηλ. ασφάλειες, από τις οποίες οι 5 είναι ελαττωματικές. Γίνεται τυχαία επιλογή 4 ασφαλειών και μάλιστα τις δοκιμάζουμε. Εάν βρεθούν περ/ρες από μια ελαττωματικές το κουτί επιστρέφεται ως απαράδεκτο. Να υπολογίσετε την πιθανότητα του ενδεχομένου το κουτί να είναι αποδεκτό

ΛΥΣΗ

Έστω το $A = \{$ το κουτί αποδεκτό $\}$.

Προφανώς, το πλήθος των δυνατών περιπτώσεων είναι

$$\|\Omega\| = \binom{20}{4}$$

Έπειτα, το κουτί θα είναι αποδεκτό εάν βρεθούν μια ή καμία ελαττωματική ασφάλεια.

• Η πιθανότητα να μην βρεθεί καμία ελαττωματική ασφάλεια είναι ίση με:

$A_1 = \{$καμία ελαττ.$\}$ $\longrightarrow$ $P(A_1) = \dfrac{\binom{15}{4}}{\binom{20}{4}}$ → Από τις 15 καλές, οι 4.

• Η πιθανότητα να έχει ακριβώς μια ελαττωματική είναι ίση με:

$A_2 = \{$ακριβώς μια ελαττ.$\}$ $\longrightarrow P(A_2) = \dfrac{\binom{15}{3}\cdot\binom{5}{1}}{\binom{20}{4}}$ → Από τις 15 καλές, οι 3 και από τις 5 ελαττ., η 1

ΑΛΛΑ, τα ενδεχόμενα A_1, A_2 είναι ασυμβίβαστα.

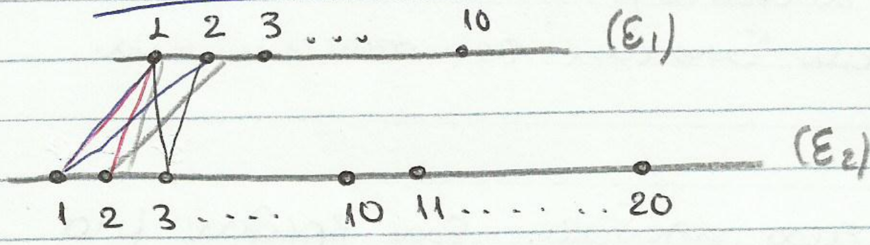
άρα ισχύει (Απλός προσθετικός Νόμος)

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A) = P(A_1) + P(A_2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{\binom{15}{4}}{\binom{20}{4}} + \frac{\binom{15}{3}\cdot\binom{5}{1}}{\binom{20}{4}} = \frac{728}{969} \simeq 75\%$$

7) Δίνονται δυο παράλληλες ευθείες (ε_1) και (ε_2). Στην (ε_1) ορίζομε 10 σημεία και στην (ε_2) 20 σημεία. Πόσα τρίγωνα ορίζουν τα σημεία αυτά; Αν επιλέξομε τυχαίως ένα τέτοιο τρίγωνο, ποια η πιθανότητα να έχει μια πλευρά του στην ε_1;

ΛΥΣΗ



(Τρίγωνο = τρία σημεία)

Τρίγωνο = τρία σημεία → 2 σημεία (ε_1) και 1 σημεία της (ε_2)
ή
→ 1 σημείο (ε_1) και 2 σημεία της (ε_2)

Έστω A = { 2 σ. (ε_1) και 1 σ. (ε_2) }

Έχω να επιλέξω τις δυάδες των 10 σημείων της (ε_1) δηλ. $\binom{10}{2}$ και ταυτόχρονα από την (ε_2) τα $\binom{20}{1}$

Όπου αυτό με μαθηματική μοντελοποίηση θα είναι:

(*) $\binom{10}{2} \times \binom{20}{1}$ (αλλά αυτό ισχύει για κορυφή στην (ε_2) και βάση στην (ε_1))

αλλά αυτό το σκηνικό μπορεί να πάει και ανάποδα.
δηλ. κορυφή στην (ε_1) και βάση στην (ε_2)
όπου αυτό με μαθηματική μοντελοποίηση θα είναι:

(**) $\binom{20}{2} \times \binom{10}{1}$

Διότι έχουμε (Μ)

Άρα, υπάρχουν συνολικά:

$$\binom{10}{2} \times \binom{20}{1} + \binom{20}{2} \times \binom{10}{1} = 2.800 \text{ τρίγωνα}$$

Εστω ενδεχομενο $B = \{$ πλευρα στην $ε_1 \}$

Για να έχει πλευρά του στην $(ε_1)$ τότε αναγκαστικά
θα έχει κορυφή στην $(ε_2)$
οπου ήδη γνωρίζουμε απο προηγουμενως, ότι
2 σημεία στην $(ε_1)$ και ενα σημειο στην $(ε_2)$
με A το ενδεχομενο αυτο, ισχυει:

$$\|A\| = \binom{10}{2} \times \binom{20}{1}$$

άρα

$$P(B) = \frac{\|B\|}{\|S\|} = \frac{\|A\|}{\|S\|} = \frac{\binom{10}{2} \times \binom{20}{1}}{\binom{10}{2}\binom{20}{1} + \binom{20}{2} \times \binom{10}{1}} = \frac{9}{28}$$

8) Ρίχνουμε νομισμα $ν$-φορες. Να βρεθεί η πιθανότητα του ενδεχομενου να μην φερουμε σε 2 διαδοχικες ριψεις το ιδιο αποτελεσμα.

ΛΥΣΗ

Γενικά, ο δειγματικος χωρος $\|S\| = 2^{ν}$
διοτι κάθε φόρα που ριχνουμε το νομισμα θα παίρνουμε κορόνα ή γραμματα.
Αρα, εχουμε $ν$-θεσεις οπου η καθε θεση "γεμίζει" με 2 τροπους.

$$\left.\begin{matrix} \underline{1} & \underline{2} & \cdots & \underline{ν} \\ 2 \times & 2 \times & \cdots & \times 2 \end{matrix}\right\} 2^{ν}$$

Επειτα, αφου δεν θα υπαρχουν 2 διαδοχικές ριψεις με το ιδιο αποτελεσμα εχουμε δυο ευνοϊκες περιπτωσεις
1η ⟶ ΚΓΚΓΚΓ... και 2η ⟶ ΓΚΓΚΓΚ

άρα $P(\text{όχι το ιδιο αποτελεσμα}) = \dfrac{2}{2^{ν}} = \dfrac{1}{2^{ν-1}}$

9) Απο μια τάξη οπου φοιτούν 10 κορίτσια και 12 αγόρια γίνεται τυχαία επιλογή τριών ατόμων που θα εκπροσωπίσουν την τάξη. Να βρείτε την πιθανότητα και τα 3 ατομα να είναι του ιδιου φυλ...

ΛΥΣΗ

Συνολικά εχουμε $10+12=22$ ατομα

οπου 3 επιλεγονται άρα εχουμε:

$\binom{22}{3}$ "συνδυασμό"

Εστω $A=\{$ και τα 3 ατομα του ιδιου φυλου $\}$

άρα $\|A\| = \binom{10}{3} + \binom{12}{3}$.

(3 να 'ναι αγόρια $\underline{\underline{ή}}$ 3 να 'ναι κορίτσια)

Αρα, $P(A) = \dfrac{\|A\|}{\|S\|} = \dfrac{\binom{10}{3}+\binom{12}{3}}{\binom{22}{3}}$.

10) Υπάλληλος χώρου σταθμευσης δίνει στην τυχη 3 κλειδιά σε 3 οδηγους. Να βρειτε:

α) P(καθε οδηγος να πάρει το κλειδί του) = ;

β) P(Μονο ενας οδηγος να παρει το κλειδί του) = ;

γ) P(κανενας τους να μην παρει το κλειδι του) = ;

ΛΥΣΗ

οδ.1	οδ2	οδ3
K_1	K_2	K_3
$\boxed{K_1}$	K_3	K_2
K_2	K_1	$\boxed{K_3}$
K_2	K_3	K_1
K_3	K_1	K_2
K_3	$\boxed{K_2}$	K_1

α) $P(A) = \dfrac{1}{6}$.

β) $P(B) = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$

γ) $P(\Gamma) = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$